19.1 二次根式及其性质

整式和分式都可以表示一些问题中的数量和数量关系. 在学习了算术平方根的概念后，我们还可以用含有根号的式子表示数量和数量关系. 例如，本章引言中广播电视节目信号的传播半径 r 可以表示为 $\sqrt{2Rh}$.

再来看一些例子.

思考

用含有根号的式子填空，看一看写出的结果有什么共同特征：

（1）一个长方形的围栏，长是宽的 2 倍，面积为 130 m^2，则它的宽为________m.

（2）一个大正方形的面积是一个边长为 a 的正方形与另一个边长为 1 的正方形的面积之和，则大正方形的边长为________.

（3）一个物体从高处自由落下，落到地面所用的时间 t（单位：s）与开始落下时离地面的高度 h（单位：m）的关系近似为 $h=5t^2$. 如果用含有 h 的式子表示 t，那么 t 为________.

上面问题的结果分别是 $\sqrt{65}$，$\sqrt{a^2+1}$，$\sqrt{\dfrac{h}{5}}$，它们表示一些正数的算术平方根. 一般地，我们把形如 $\sqrt{a}$（$a\geqslant 0$）的式子叫作**二次根式**（quadratic radical）. 二次根式是代数式.

在二次根式 $\sqrt{a}$ 中，为什么 a 不能是负数？

例 1 当 x 满足什么条件时，$\sqrt{x-2}$ 在实数范围内有意义？

解： 由 $x-2\geqslant 0$，得

$$x\geqslant 2.$$

当 $x\geqslant 2$ 时，$\sqrt{x-2}$ 在实数范围内有意义.

思考

当 x 满足什么条件时，$\sqrt{x^2}$ 在实数范围内有意义？$\sqrt{x^3}$ 呢？

练习

1. 要画一个面积为 18 cm^2 的长方形，使它的长与宽之比为 3∶2，它的长、宽各应取多少？
2. 当 a 满足什么条件时，下列各式在实数范围内有意义？

   (1) $\sqrt{a-1}$；　　(2) $\sqrt{5-a}$；　　(3) $\sqrt{2a^2+1}$.
3. 当 $a=5$ 时，$\sqrt{\dfrac{a-1}{2}}$ 的值是______.

下面研究二次根式的性质.

我们知道，当 $a>0$ 时，$\sqrt{a}$ 表示 a 的算术平方根，因此 $\sqrt{a}>0$；当 $a=0$ 时，$\sqrt{a}$ 表示 0 的算术平方根，因此 $\sqrt{a}=0$. 这就是说，

$$\boxed{\sqrt{a}\geqslant 0\ (a\geqslant 0).}$$

探究

根据算术平方根的意义填空：

$(\sqrt{3})^2=$______；$(\sqrt{0.5})^2=$______；$\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)^2=$______；$(\sqrt{0})^2=$______.

$\sqrt{3}$ 是 3 的算术平方根，根据算术平方根的意义，$\sqrt{3}$ 是一个平方等于 3 的非负数. 因此，$(\sqrt{3})^2=3$.

同理，$\sqrt{0.5}$，$\sqrt{\dfrac{1}{3}}$，$\sqrt{0}$ 分别是 0.5，$\dfrac{1}{3}$，0 的算术平方根. 因此，$(\sqrt{0.5})^2=0.5$，$\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)^2=\dfrac{1}{3}$，$(\sqrt{0})^2=0$.

一般地，

$$\boxed{(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0).}$$

例 2 计算：

(1) $(\sqrt{1.5})^2$；　　(2) $(2\sqrt{5})^2$.

解：(1) $(\sqrt{1.5})^2=1.5$；

(2) $(2\sqrt{5})^2=2^2\times(\sqrt{5})^2=4\times5=20$.

例 2（2）中 $2\sqrt{5}$ 表示 $2\times\sqrt{5}$，本题用到了 $(ab)^2=a^2b^2$ 这个性质.

探究

填空：

$\sqrt{2^2}=$______；$\sqrt{0.1^2}=$______；$\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=$______；$\sqrt{0^2}=$______.

根据算术平方根的意义，可以得到

$$\sqrt{2^2}=2;\ \sqrt{0.1^2}=0.1;\ \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{3};\ \sqrt{0^2}=0.$$

一般地，

$$\boxed{\sqrt{a^2}=a\ (a\geqslant0).}$$

思考

当 a 为任意实数时，$\sqrt{a^2}$ 都有意义. 如果上式中的 a 为负实数，那么上式还成立吗？为什么？

例 3 化简：

(1) $\sqrt{16}$；　　(2) $\sqrt{(-5)^2}$.

解：(1) $\sqrt{16}=\sqrt{4^2}=4$；　　(2) $\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{5^2}=5$.

练习

1. 计算：

(1) $(\sqrt{3})^2$；　　(2) $(3\sqrt{2})^2$.

2. 化简：

(1) $\sqrt{0.3^2}$；　(2) $\sqrt{\left(-\frac{1}{7}\right)^2}$；　(3) $-\sqrt{(-\pi)^2}$；　(4) $\sqrt{10^{-2}}$.

21.2.3 三角形的中位线

前面我们研究平行四边形时，常常把它分成几个三角形，利用三角形全等研究平行四边形的有关问题. 下面利用平行四边形研究三角形的有关问题.

如图 21.2-16，在$\triangle ABC$中，D，E分别是边AB，AC的中点，连接DE. 像DE这样，连接三角形两边中点的线段叫作三角形的**中位线**.

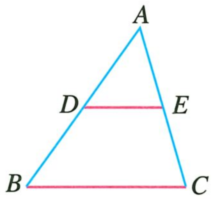

图 21.2-16

一个三角形有几条中位线？三角形的中位线和中线一样吗？

探究

观察图 21.2-16，你能发现$\triangle ABC$的中位线DE与边BC的位置关系吗？度量一下，DE与BC之间有什么数量关系？你能证明你发现的结论吗？

我们猜想：$DE /\!/ BC$，$DE=\frac{1}{2}BC$. 下面对它们进行证明.

如图 21.2-16，D，E分别是$\triangle ABC$的边AB，AC的中点. 求证：$DE /\!/ BC$，且$DE=\frac{1}{2}BC$.

分析：我们既要证明两条线段所在的直线平行，又要证明其中一条线段的长等于另一条线段长的一半.

如图 21.2-17，将DE延长一倍（得到点F）后，可以将证明$DE /\!/ BC$，且$DE=\frac{1}{2}BC$转化为证明$DF \mathrel{\underline{\parallel}} BC$，而这只要证明以$B$，$C$，$F$，$D$为顶点的四边形是平行四边形，进而只要证明四边形$ADCF$是平行四边形. 由于$DE=EF$，$E$是$AC$的中点，所以四边形$ADCF$是平行四边形可以利用“对角线互相平分的四边形是平行四边形”证明.

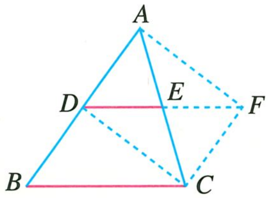

图 21.2-17

证明：如图 21.2-17，延长 DE 到点 F，使$EF=DE$，连接 FC，DC，AF.

∵ $AE=EC$，$DE=EF$，

∴ 四边形 $ADCF$ 是平行四边形.

∴ $CF\underline{\parallel}DA$.

又 D 是AB 的中点，

∴ $CF\underline{\parallel}BD$.

∴ 四边形 $DBCF$ 是平行四边形.

∴ $DF\underline{\parallel}BC$.

又 $DE=\frac{1}{2}DF$，

∴ $DE\parallel BC$，且 $DE=\frac{1}{2}BC$.

通过上述证明，得到三角形的中位线定理：

三角形的中位线平行于三角形的第三边，并且等于第三边的一半.

例 6 求证：顺次连接四边形各边的中点，所得的四边形是平行四边形.

已知：如图 21.2-18，在四边形 $ABCD$ 中，E，F，G，H 分别是边AB，BC，CD，DA 的中点.

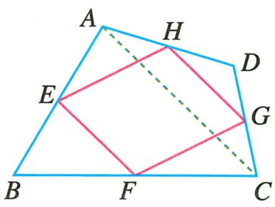

图 21.2-18

求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

分析：题目中给出了四边形各边中点，可以连接四边形的一条对角线，利用三角形中位线定理证明要证的四边形一组对边平行且相等，从而证明它是平行四边形.

证明：连接 AC.

∵ $AH=HD$，$CG=GD$，

∴ $HG\parallel AC$，且 $HG=\frac{1}{2}AC$.

同理 $EF\parallel AC$，且 $EF=\frac{1}{2}AC$.

∴ $HG\underline{\parallel}EF$.

∴ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

22.2 函数的表示

由上一节我们知道，用解析式可以表示函数与自变量之间的关系，例如路程与时间的关系；用图和表格也可以表示函数与自变量之间的关系，例如潮水高度与时间的关系、年利率与存款期限的关系. 表示函数时，要根据具体情况选择合适的方法.

有些问题中的函数关系很难用解析式表示，但是可以用图来直观地反映. 对于能用解析式表示的函数关系，如果也能画图表示，那么会使函数关系更直观. 例如，正方形的面积 S 与边长 x 的函数解析式为 $S=x^2$. 根据问题的实际意义，可知自变量 x 的取值范围是 $x>0$. 我们还可以通过在平面直角坐标系中画图的方法来表示 S 与 x 的关系.

计算并填写表 22.2-1.

表 22.2-1

x	…	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	…
S	…	0.25	1							…

如图 22.2-1，在平面直角坐标系中，画出表 22.2-1 中各对数值所对应的点，然后用平滑曲线依次连接这些点. 所得曲线上每一个点都代表 x 的值与 S 的值的一种对应，例如，点 (2, 4) 表示当 $x=2$ 时，$S=4$.

自变量 x 的一个确定的值与它所对应的唯一的函数值 S，是否确定了一个点 (x, S) 呢？

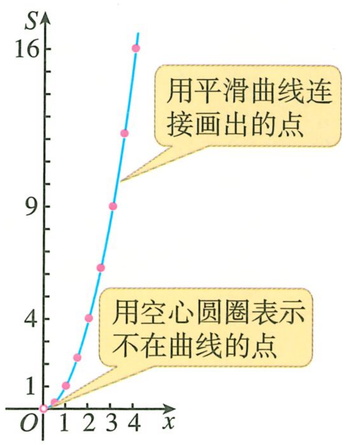

图 22.2-1

表示 x 与 S 的对应关系的点有无数个. 但是实际上我们只能描出其中有限个点，同时想象出其他点的位置.

一般地，对于一个函数，如果把自变量与函数的每对对应值分别作为点的横、纵坐标，那么坐标平面内由这些点组成的图形，就是这个**函数的图象**. 图 22.2-1 的曲线即函数 $S=x^2$ ($x>0$) 的图象.

例 1 在下列式子中，y 是 x 的函数. 画出这些函数的图象，通过图象观察函数与自变量的关系.

(1) $y=x+0.5$；　　　　(2) $y=\dfrac{3}{x}$ ($x>0$).

解：(1) 从式子 $y=x+0.5$ 可以看出，x 取任意实数时这个式子都有意义，所以 x 的取值范围是全体实数.

从 x 的取值范围中选取一些数值，算出 y 的对应值，列表（计算并填写表 22.2-2 中空格）.

表 22.2-2

x	…	-2	-1	0	1	2	…
y	…		-0.5	0.5			…

根据表 22.2-2 中的数值在平面直角坐标系中描点 (x, y)，并用平滑曲线连接这些点（图 22.2-2）.

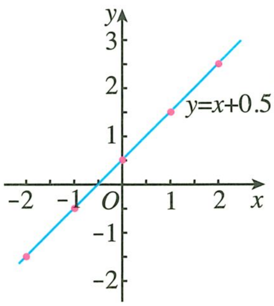

图 22.2-2

从函数 $y=x+0.5$ 的图象可以看出，直线从左向右上升，即当 x 由小变大时，y 随之增大.

(2) $y=\dfrac{3}{x}$ ($x>0$) 中 x 的取值范围是全体正实数，从 x 的取值范围中选取一些数值，算出 y 的对应值，列表（计算并填写表 22.2-3 中空格）.

表 22.2-3

x	…	0.5	1	2	3	4	5	6	…
y	…		3	1.5	1	0.75			…

根据表 22.2-3 中的数值在平面直角坐标系中描点 (x, y)，并用平滑曲线连接这些点（图 22.2-3）.

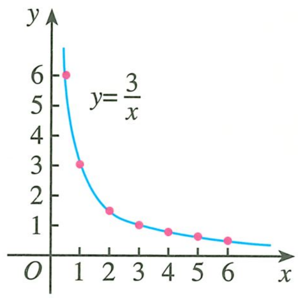

图 22.2-3

从函数 $y=\frac{3}{x}$ $(x>0)$ 的图象可以看出，曲线从左向右下降，即当 x 由小变大时，y 随之减小.

归纳

用描点法画函数图象的一般步骤如下：

第一步，列表——表中给出一些自变量的值及其对应的函数值；

第二步，描点——在平面直角坐标系中，以自变量的值为横坐标，相应的函数值为纵坐标，描出表格中数值对应的各点；

第三步，连线——按照横坐标从小到大的顺序，把所描出的各点用平滑曲线连接起来.

练习

1. (1) 画出函数 $y=2x-1$ 的图象；

   (2) 判断点 $A(-2.5, -4)$，$B(1, 3)$，$C(2.5, 4)$ 是否在函数 $y=2x-1$ 的图象上.

2. (1) 画出函数 $y=x^2+1$ 的图象.

   (2) 观察函数 $y=x^2+1$ 的图象，当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大还是 y 随 x 的增大而减小？当 $x>0$ 时呢？