1.2 空间向量基本定理

我们知道，平面内的任意一个向量 $\boldsymbol{p}$ 都可以用两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 来表示（平面向量基本定理）. 类似地，任意一个空间向量能否用任意三个不共面的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 来表示呢？

我们先从空间中三个不共面的向量两两垂直这一特殊情况开始讨论.

如图 1.2-1，设 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 是空间中三个两两垂直的向量，且表示它们的有向线段有公共起点 O. 对于任意一个空间向量 $\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OP}$，设 $\overrightarrow{OQ}$ 为 $\overrightarrow{OP}$ 在 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 所确定的平面上的投影向量，则 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}$. 又向量 $\overrightarrow{QP}$，$\boldsymbol{k}$ 共线，因此存在唯一的实数 z，使得 $\overrightarrow{QP}=z\boldsymbol{k}$，从而

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+z\boldsymbol{k}.$$

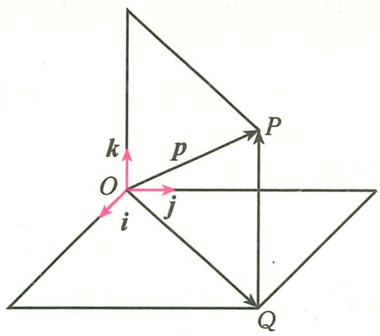


图 1.2-1

而在 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 所确定的平面上，由平面向量基本定理可知，存在唯一的有序实数对 (x, y)，使得

$$\overrightarrow{OQ}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}.$$

从而

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+z\boldsymbol{k}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

因此，如果 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 是空间三个两两垂直的向量，那么对任意一个空间向量 $\boldsymbol{p}$，存在唯一的有序实数组 (x, y, z)，使得

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

我们称 $x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$ 分别为向量 $\boldsymbol{p}$ 在 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 上的分向量.

?

你能证明唯一性吗？

探究

在空间中，如果用任意三个不共面的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 代替两两垂直的向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，你能得出类似的结论吗？

类似平面向量基本定理，我们有空间向量基本定理.

定理 如果三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，那么对任意一个空间向量 $\boldsymbol{p}$，存在唯一的有序实数组 (x, y, z)，使得

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}.$$

请你自己给出空间向量基本定理的证明.

由此可知，如果三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，那么所有空间向量组成的集合就是$\{\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}, x, y, z\in\mathbf{R}\}$. 这个集合可看作由向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 生成的，我们把 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ 叫做空间的一个**基底**（base），$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 都叫做**基向量**（base vectors）. 空间任意三个不共面的向量都可以构成空间的一个基底.

特别地，如果空间的一个基底中的三个基向量两两垂直，且长度都为 1，那么这个基底叫做**单位正交基底**，常用 $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ 表示. 由空间向量基本定理可知，对空间中的任意向量 $\boldsymbol{a}$，均可以分解为三个向量 $x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$，使 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. 像这样，把一个空间向量分解为三个两两垂直的向量，叫做把空间向量进行**正交分解**.

由空间向量基本定理可知，如果把三个不共面的向量作为空间的一个基底，那么所有空间向量都可以用三个基向量表示出来. 进一步地，所有空间向量间的运算都可以转化为基向量间的运算，这为解决问题带来了方便.

例 1 如图 1.2-2，M 是四面体 $OABC$ 的棱 BC 的中点，点 N 在线段 OM 上，点 P 在线段 AN 上，且 $MN=\frac{1}{2}ON$，$AP=\frac{3}{4}AN$，用向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 表示 $\overrightarrow{OP}$.

分析： $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 是三个不共面的向量，它们构成空间的一个基底 $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$，$\overrightarrow{OP}$ 可以用基底 $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ 表示出来.

解：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AN}\\&=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OA})\\&=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{ON}-\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}\\&=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\right)\\&=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}.\end{aligned}$$

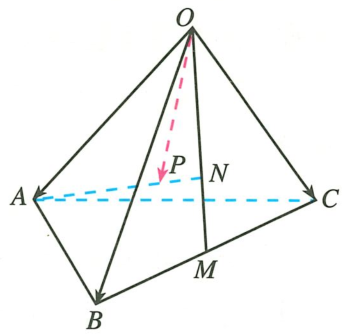
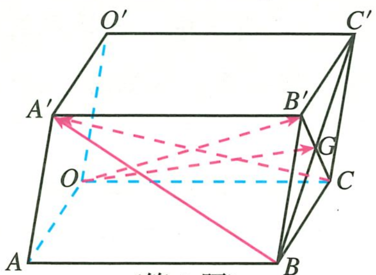


图 1.2-2

练习

1. 已知 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ 是空间的一个基底，从 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 中选哪一个向量，一定可以与向量 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 构成空间的另一个基底?
2. 已知 O，A，B，C 为空间的四个点，且向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 不构成空间的一个基底，那么点 O，A，B，C 是否共面?
3. 如图，已知平行六面体 $OABC\text{-}O'A'B'C'$，点 G 是侧面 $BB'C'C$ 的中心，且 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OO'}=\boldsymbol{c}$.
   (1) $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ 是否构成空间的一个基底?
   (2) 如果 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ 构成空间的一个基底，那么用它表示下列向量：$\overrightarrow{OB'}$，$\overrightarrow{BA'}$，$\overrightarrow{CA'}$，$\overrightarrow{OG}$.



（第 3 题）

2.2 直线的方程

我们知道，给定一点和一个方向可以唯一确定一条直线. 这样，在平面直角坐标系中，给定一个点 $P_0(x_0, y_0)$ 和斜率 k(或倾斜角)，就能唯一确定一条直线. 也就是说，这条直线上任意一点的坐标 (x, y) 与点 P_0 的坐标 (x_0, y_0) 和斜率 k 之间的关系是完全确定的. 那么，这一关系如何表示呢？下面我们就来研究这个问题.

2.2.1 直线的点斜式方程

如图 2.2-1，直线 l 经过点 $P_0(x_0, y_0)$，且斜率为 k. 设 $P(x, y)$ 是直线 l 上不同于点 P_0 的任意一点，因为直线 l 的斜率为 k，由斜率公式得

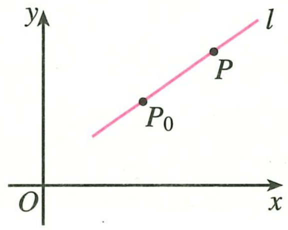


图 2.2-1

$$k=\frac{y-y_0}{x-x_0},$$

即

$$\boxed{y-y_0=k(x-x_0).}$$

点 P_0 的坐标 (x_0, y_0) 满足关系式 $y-y_0=k(x-x_0)$ 吗？

由上述推导过程可知：

(1) 直线 l 上每一个点的坐标 (x, y) 都满足关系式 $y-y_0=k(x-x_0)$；反过来，我们还可以验证

(2) 坐标满足关系式 $y-y_0=k(x-x_0)$ 的每一个点都在直线 l 上.

事实上，若点 $P_1(x_1, y_1)$ 的坐标 x_1，y_1 满足关系式 $y-y_0=k(x-x_0)$，则

$$y_1-y_0=k(x_1-x_0).$$

当 $x_1=x_0$ 时，$y_1=y_0$，这时点 P_1 与 P_0 重合，显然有点 P_1 在直线 l 上；

当 $x_1\neq x_0$ 时，有 $k=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$，这表明过点 P_1，P_0 的直线 l_1 的斜率为 k. 因为直线 l，l_1 的斜率都为 k，且都过

建立直线的方程，就是利用确定直线位置的几何要素，建立直线上任意一点的横坐标 x，纵坐标 y 所满足的关系式.

点 P_0，所以它们重合. 所以，点 P_1 在直线 l 上.

由（1）（2）可得：坐标满足关系式 $y-y_0=k(x-x_0)$ 的点一定在直线 l 上；直线 l 上任意一点的坐标一定满足关系式 $y-y_0=k(x-x_0)$. 我们把方程

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

称为过点 $P_0(x_0,\ y_0)$，斜率为 k 的直线 l 的方程.

方程 $y-y_0=k(x-x_0)$ 由直线上一个定点 $(x_0,\ y_0)$ 及该直线的斜率 k 确定，我们把它叫做直线的**点斜式方程**，简称**点斜式**（point slope form）.

思考

（1）当直线 l 的倾斜角为 0°时，直线 l 的方程是什么？为什么？

（2）当直线 l 的倾斜角为 90°时，直线 l 的方程如何表示？为什么？

当直线 l 的倾斜角为 0°时（图 2.2-2），$\tan 0°=0$，即 $k=0$，这时直线 l 与 x 轴平行或重合，直线 l 的方程是

$$y-y_0=0，即\ y=y_0.$$

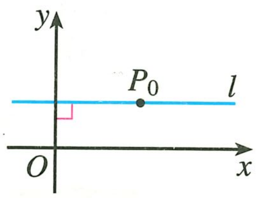


图 2.2-2

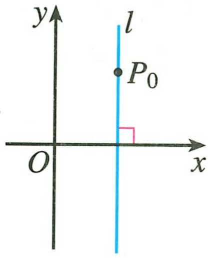


图 2.2-3

当直线 l 的倾斜角为 90°时（图 2.2-3），由于 $\tan 90°$无意义，直线没有斜率，这时直线 l 与 y 轴平行或重合，它的方程不能用点斜式表示. 又因为这时直线 l 上每一点的横坐标都等于 x_0，所以它的方程是

$$x-x_0=0，即\ x=x_0.$$

例 1 直线 l 经过点 $P_0(-2,\ 3)$，且倾斜角 $\alpha=45°$，求直线 l 的点斜式方程，并画出直线 l.

解： 直线 l 经过点 $P_0(-2,\ 3)$，斜率 $k=\tan 45°=1$，代入点斜式方程得

$$y-3=x+2.$$

画图时，只需再找出直线 l 上的另一点 $P_1(x_1,\ y_1)$，例如，取 $x_1=-1$，则 $y_1=4$，得点 P_1 的坐标为 $(-1,\ 4)$，过 P_0，P_1 两点的直线即为所求，如图 2.2-4 所示.

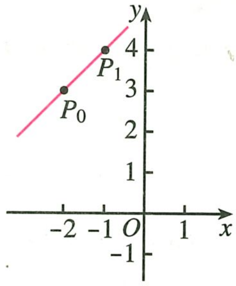


图 2.2-4

下面我们看点斜式的一种特殊情形：如果斜率为 k 的直线 l 过点 $P_0(0, b)$，这时 P_0 是直线 l 与 y 轴的交点，代入直线的点斜式方程，得

$$y-b=k(x-0),$$

即

$$\boxed{y=kx+b.}$$

我们把直线 l 与 y 轴的交点 $(0, b)$ 的纵坐标 b 叫做直线 l 在 y 轴上的**截距** (intercept). 这样，方程 $y=kx+b$ 由直线的斜率 k 与它在 y 轴上的截距 b 确定，我们把方程 $y=kx+b$ 叫做直线的**斜截式方程**，简称**斜截式** (slope intercept form). 其中，k 和 b 均有明显的几何意义：k 是直线的斜率，b 是直线在 y 轴上的截距.

截距是距离吗？

思考

方程 $y=kx+b$ 与我们学过的一次函数表达式类似. 我们知道，一次函数的图象是一条直线，你如何从直线方程的角度认识一次函数 $y=kx+b$？你能说出一次函数 $y=2x-1$，$y=3x$ 及 $y=-x+3$ 图象的特点吗？

例 2 已知直线 l_1：$y=k_1x+b_1$，l_2：$y=k_2x+b_2$，试讨论：(1) $l_1 /\!/ l_2$ 的条件是什么？(2) $l_1 \perp l_2$ 的条件是什么？

分析：回顾前面用斜率判断两条直线平行、垂直的结论，可以发现 $l_1 /\!/ l_2$ 或 $l_1 \perp l_2$ 时，k_1，k_2 与 b_1，b_2 应满足的关系.

解：(1) 若 $l_1 /\!/ l_2$，则 $k_1=k_2$，此时 l_1，l_2 与 y 轴的交点不同，即 $b_1 \neq b_2$；反之，若 $k_1=k_2$，且 $b_1 \neq b_2$，则 $l_1 /\!/ l_2$.

(2) 若 $l_1 \perp l_2$，则 $k_1k_2=-1$；反之，若 $k_1k_2=-1$，则 $l_1 \perp l_2$.

由例 2 我们得到，对于直线 l_1：$y=k_1x+b_1$，l_2：$y=k_2x+b_2$，

$$l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2，且 b_1 \neq b_2；$$
$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1.$$

练习

1. 写出下列直线的点斜式方程：

(1) 经过点 $A(3, -1)$，斜率是 $\sqrt{2}$；

(2) 经过点 $B(-\sqrt{2}, 2)$，倾斜角是 $30°$；

(3) 经过点 $C(0, 3)$，倾斜角是 $0°$；

3.3.2 抛物线的简单几何性质

思考

类比用方程研究椭圆、双曲线几何性质的过程与方法，你认为应研究抛物线

$$y^2=2px \ (p>0) \qquad ①$$

的哪些几何性质？如何研究这些性质？

1. 范围

因为 $p>0$，由方程①可知，对于抛物线上的点 $M(x, y)$，$x\geqslant 0$，$y\in\mathbf{R}$，当 $x>0$ 时，抛物线在 y 轴的右侧，开口方向与 x 轴的正方向相同；当 x 的值增大时，$|y|$ 的值也增大，这说明抛物线向右上方和右下方无限延伸.

2. 对称性

以 $-y$ 代 y，方程①不变，所以抛物线关于 x 轴对称. 我们把抛物线的对称轴叫做**抛物线的轴**.

3. 顶点

抛物线和它的轴的交点叫做**抛物线的顶点**. 在方程①中，当 $y=0$ 时，$x=0$，因此抛物线的顶点就是原点.

4. 离心率

抛物线上的点 M 与焦点 F 的距离和点 M 到准线的距离 d 的比 $\frac{|MF|}{d}$，叫做**抛物线的离心率**，用 e 表示. 由抛物线的定义可知，$e=1$.

例 3 已知抛物线关于 x 轴对称，它的顶点在原点，并且经过点 $M(2, -2\sqrt{2})$，求它的标准方程.

解： 因为抛物线关于 x 轴对称，它的顶点在原点，并且经过点 $M(2, -2\sqrt{2})$，所以可设它的标准方程为

$$y^2=2px \ (p>0).$$

因为点 M 在抛物线上，所以

$$(-2\sqrt{2})^2=2p\times 2,$$

解得 $p=2$.

因此，所求抛物线的标准方程是

$$y^2=4x.$$

思考

顶点在原点，对称轴是坐标轴，并且经过点 $M(2,\ -2\sqrt{2})$ 的抛物线有几条？求出这些抛物线的标准方程.

例 4 斜率为 1 的直线 l 经过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F，且与抛物线相交于 A，B 两点，求线段 AB 的长.

分析： 由抛物线的方程可以得到它的焦点坐标，又直线 l 的斜率为 1，所以可以求出直线 l 的方程；与抛物线的方程联立，可以求出 A，B 两点的坐标；利用两点间的距离公式可以求出 $|AB|$. 这种方法思路直接，具有一般性. 请你用此方法求 $|AB|$.

下面介绍另外一种方法——数形结合的方法.

在图 3.3-4 中，设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$. 由抛物线的定义可知，$|AF|$ 等于点 A 到准线的距离 $|AA'|$. 由 $p=2$，$\dfrac{p}{2}=1$，得 $|AA'|=x_1+\dfrac{p}{2}=x_1+1$，于是 $|AF|=x_1+1$. 同理，$|BF|=|BB'|=x_2+\dfrac{p}{2}=x_2+1$，于是得

$$|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+p=x_1+x_2+2.$$

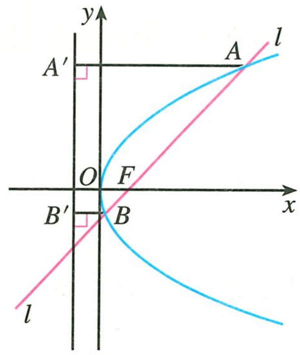


图 3.3-4

由此可见，只要求出点 A，B 的横坐标之和 x_1+x_2，就可以求出 $|AB|$.

解： 由题意可知，$p=2$，$\dfrac{p}{2}=1$，焦点 F 的坐标为 $(1,\ 0)$，准线方程为 $x=-1$. 如图 3.3-4，设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，A，B 两点到准线的距离分别为 d_A，d_B. 由抛物线的定义，可知

$$|AF|=d_A=x_1+1,\ |BF|=d_B=x_2+1,$$

于是

$$|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+2.$$

因为直线 l 的斜率为 1，且过焦点 $F(1,\ 0)$，所以直线 l 的方程为

$$y=x-1. \qquad ①$$

将①代入方程 $y^2=4x$，得 $(x-1)^2=4x$，化简，得

$$x^2-6x+1=0.$$

所以

$$x_1+x_2=6,$$
$$|AB|=x_1+x_2+2=8.$$

所以，线段 AB 的长是 8.

> ？ 如果直线 l 不经过焦点 F，$|AB|$ 还等于 x_1+x_2+2 吗？